

На правах рукописи



Мячин Михаил Леонидович

**ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В
СЕТЯХ ИМПУЛЬСНЫХ НЕЙРОНОВ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2009

Работа выполнена на кафедре компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

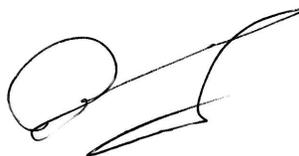
- Научный руководитель** – кандидат физико-математических наук, доцент Глызин Сергей Дмитриевич
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор Бутковский Олег Ярославович
доктор физико-математических наук, профессор Тимофеев Евгений Александрович
- Ведущая организация** – Институт Радиотехники и Электроники РАН им. В.А. Котельникова

Защита состоится «6» ноября 2009 г. в 15⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете имени П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «5» октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Вопрос об устройстве нервной системы и о детальном описании процессов обработки информации в ней привлекает внимание прежде всего из-за потенциальных практических приложений. В последнее время размеры активных элементов электронных схем сравнялись с размерами нервных клеток, в связи с чем большой интерес представляет построение искусственных систем, реализующих принципы обработки информации, используемые биологическими нейронными системами.

Нейросетевой подход к исследованию нервной системы состоит в построении и изучении искусственных систем обработки информации, в которых воплощены некоторые из известных принципов функционирования нервной системы живых существ. Несмотря на существенные трудности, связанные с экспериментальной проверкой предсказаний, получаемых в процессе изучения нейросетевых моделей, в рамках нейросетевого подхода было выяснено, что уже в простейших нейронных системах реализуются такие сложные высокоуровневые психологические феномены как память, обобщение, запоминание и забывание информации, образование ложных образов при запоминании больших объемов информации и т.д. С другой стороны, успешное применение нейросетевых устройств и алгоритмов обработки информации к задачам распознавания образов и управления сложными динамическими системами демонстрирует эффективность и практическую ценность нейросетевого подхода.

При построении моделей биологических нейронных сетей может использоваться широкий спектр моделей биологического нейрона различного уровня детализации — от простейших пороговых сумматоров до моделей, воспроизводящих динамику процессов ионного транспорта, происходящих в мембране биологического нейрона. Основным требованием, предъявляемым к модели биологического нейрона, используемой для построения нейронной сети, является разумный баланс между простотой и биологической реалистичностью. При этом в зависимости от используемых при построении нейронной сети соглашений относительно представления, хранения и обработки информации, под биологической реалистичностью в различных случаях может пониматься корректное воспроизведение различных свойств биологического нейрона.

В последнее время активно исследуются *импульсные модели нейрона*, занимающие промежуточное положение между моделью Ходжкина-Хаксли, моделирующей ионный механизм генерации спайка и простыми моделями нейрона, отражающими только некоторые свойства биологического нейрона. Импульсные модели на качественном уровне воспроизводят генерацию спайка и реакцию нейрона на внешнее воздействие, не моделируя протекающие при этом электрохимические процессы или моделируя их только в самых общих чертах.

Было предложено большое количество феноменологических импульсных моделей нейрона, отражающих те или иные особенности динамики биологического нейрона. Среди импульсных моделей нейрона наибольшей простотой и популярностью отличаются т.н. *интегративно-пороговый элемент (Integrate-and-fire Model)* и *модель отклика на спайк (Spike Response Model, SRM)*.

В 1990–1993 годах в работах В.В. Майорова была предложена феноменологическая импульсная модель нейрона, основанная на использовании дифференциального уравнения с запаздыванием. Эта модель хорошо согласуется с биологическими данными, достаточно проста и допускает аналитическое исследование. В цикле работ В.В. Майорова и С.А.Кашенко была построена асимптотика решения уравнения импульсного нейрона и показано, что нейрон генерирует короткие высокоамплитудные спайки, разделенные промежутками медленного изменения мембранного потенциала. В этих работах была также предложена модель синаптического взаимодействия импульсных нейронов и рассмотрено распространение волн в кольцевых нейронных структурах. Среди важных задач, решенных в рамках данной модели, отметим построение нейронной сети, генерирующей периодические последовательности импульсов с заданными межспайковыми расстояниями и сети, на которой реализуется режим последовательной синхронизации заранее заданных групп нейронов. Для кольцевых нейронных структур были также рассмотрены режимы синхронизации колебаний, моделирующие процессы запоминания и хранения информации в нервной системе.

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию динамики предложенной В.В. Майоровым импульсной модели нейрона и нейронных сетей, построенных на ее основе.

Исследование нейронных сетей — одна из перспективных областей современной прикладной математики. Ее глобальной целью является достижение понимания механизмов работы мозга. С тече-

нием времени внимание исследователей перемещалось от моделей, отражающих наиболее общие особенности нервной системы, к более подробным моделям, отражающим достаточно тонкие особенности ее динамики. В настоящее время в центре внимания исследователей находятся режимы синхронизации осцилляторной динамики в импульсных нейронных сетях. Актуальность данной работы определяется тем, что она посвящена исследованию и планированию режимов синхронизации в нейронных сетях, построенных на базе импульсной модели биологического нейрона.

Цель работы

В диссертации рассмотрены две задачи: задача получения по возможности более точной асимптотической оценки периода колебаний изолированного нейрона и задача о взаимодействии диффузионно связанных нейронных осцилляторов. Для задачи о периоде колебаний изолированного нейрона получена оценка периода, имеющая первый порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра. Для задачи о диффузионном взаимодействии получены асимптотические формулы, описывающие структуру аттракторов системы, состоящей из двух и трех диффузионно взаимодействующих нейронов. На основе полученных асимптотических формул описаны автоволновые режимы, имеющие место в плоской однородной нейронной сети с локальными диффузионными связями.

Методы исследования

Основным методом исследования является метод большого параметра, предложенный в работах С.А. Кащенко. При получении асимптотической оценки периода колебаний изолированного нейрона используются методы, связанные с построением асимптотических разложений для несобственных интегралов. При доказательстве существования периодических решений существенно использовались методы нелинейного функционального анализа.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем:

- Предложен новый метод асимптотического исследования дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающих динамику импульсного нейрона. С помощью предложенного метода проведено исследование динамики изолированного импульсного нейрона и получена оценка периода решения уравнения, имеющая первый порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра.
- Проведено исследование диффузионного взаимодействия двух и трех нейронов. Получены асимптотические формулы, описывающие временное рассогласование спаков, генерируемых нейронами. Исследованы автоволновые режимы в плоской однородной нейронной сети с локальными диффузионными связями.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена оценка периода решения уравнения, имеющая первый порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра.
2. Получены асимптотические формулы, описывающие диффузионное взаимодействие двух и трех нейронов.
3. Описаны автоволновые режимы, имеющие место в плоской однородной нейронной сети с локальными диффузионными связями.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при исследовании автоколебательных процессов в импульсных нейронных сетях, состоящих из осцилляторных элементов, описываемых уравнением с запаздыванием. Описанные в работе автоволновые режимы могут быть использованы в качестве основы при разработке нейросетевых моделей процессов запоминания и хранения информации в нервной системе. Разработанная методика вычисления продолжительности импульсных процессов в нейронных системах может быть использована при решении широкого спектра задач, связанных с исследованием структуры авто-

колебательных процессов в системах осцилляторов, описываемых дифференциальным уравнением с запаздыванием.

Апробация работы

Результаты работы были доложены на семинаре «Моделирование и исследование нейронных сетей» и представлены на следующих конференциях:

Студенческая научная конференция мехмата МГУ (Москва, 1994); Всероссийская научная конференция, посвященная 200-летию Ярославского государственного Университета им. П.Г. Демидова (Ярославль, 2003); V Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2003» (Москва, 2003); XX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (Ярославль, 2007); IX Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2007» (Москва, 2007).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 9 статей, в том числе 4 в изданиях из списка ВАК. Часть работ выполнена в соавторстве с В.В. Майоровым и С.А. Кащенко, которым принадлежит постановка рассмотренных задач и методика их исследования. Во всех остальных случаях в диссертацию включены результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы

Работа состоит из трех глав (первая из которых является вводной), заключения и списка литературы.

В первой главе приведен общий обзор предметной области: кратко охарактеризованы основные модели биологического нейрона и модельные представления, относящиеся к кодированию информации в нервной системе, дан обзор импульсных нейросетевых моделей.

Во второй главе рассмотрена задача вычисления периода колебаний в модели импульсного нейрона, построенной на основе уравнения с запаздыванием. Получена оценка периода решения уравне-

ния, имеющая первый порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра.

В третьей главе рассмотрена динамика систем диффузионно связанных импульсных нейронов с запаздыванием. Получены асимптотические формулы, описывающие взаимодействие двух и трех диффузионно связанных нейронов. Путем численного моделирования для системы из двух и трех диффузионно связанных нейронов продемонстрировано существование сложных многообходных аттракторов. Описаны автоволновые режимы, имеющие место в плоской однородной нейронной сети с локальными диффузионными связями. Показано, что в такой сети практически любая кривая может служить циклически повторяющимся фронтом волны начала импульсов.

В заключении сформулированы некоторые не решенные задачи, непосредственно примыкающие к тематике данной работы.

Краткое содержание работы

В первой главе дан общий обзор предметной области (искусственные нейронные сети), обосновывается актуальность рассматриваемой в работе тематики (импульсные нейронные сети), определяются цели и задачи настоящего исследования, формулируется научная новизна и практическая значимость работы, перечисляются основные положения, выносимые на защиту.

Во второй главе приведен вывод уравнения с запаздыванием, описывающего динамику мембранного потенциала изолированного нейрона и основанного на феноменологическом представлении о временной задержке калиевого ионного тока. После нормировки и перехода к безразмерному времени рассматриваемое уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{u}(t) = \lambda [f_K(u(t-1)) - f_{Na}(u(t)) - 1] u(t), \quad (1)$$

где $u(t) > 0$ — мембранный потенциал (за начало отсчета принимается значение мембранного потенциала в состоянии гиперполяризации); $\lambda \gg 1$ — большой параметр, характеризующий скорость процесса поляризации мембраны нейрона; $f_K(u)$ и $f_{Na}(u)$ — некоторые положительные достаточно гладкие убывающие функции, описывающие зависимость ионной проводимости мембраны нейрона по

отношению к ионам калия и натрия от величины мембранного потенциала (отметим, что калиевая ионная проводимость определяется значением $u(t-1)$ мембранного потенциала).

Для удобства формулировки результатов введем некоторые обозначения:

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1, \quad (2)$$

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1, \quad (3)$$

$$\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1. \quad (4)$$

Из биологических соображений следует условие неустойчивости нулевого состояния равновесия, которое имеет вид $\alpha > 0$.

Начальная задача для уравнения (1) определяется заданием функции $u(t)$ на произвольном отрезке единичной длины, в качестве которого будем использовать отрезок $[-1, 0]$:

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-1, 0]. \quad (5)$$

Функцию $\varphi(s)$ будем называть начальной функцией уравнения (1), а решение такой начальной задачи (5) будем обозначать символом $u_\varphi(t)$. Определим множество S допустимых начальных функций $\varphi(s)$ следующим образом:

$$S = \{\varphi \in C[-1, 0] : \varphi(s) \leq \lambda^{-1}, \varphi(0) = \lambda^{-1}\}. \quad (6)$$

С точки зрения асимптотики нулевого порядка точности структура решения уравнения (1) описывается следующей теоремой:

Теорема 1. *Если начальная функция $\varphi(s)$ выбирается из множества S , определенного формулой (6), а гладкие положительные функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно стремятся к нулю при $u \rightarrow \infty$, то для решения $u(t)$ уравнения (1) при $\lambda \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические равенства:*

$$u(t) = \begin{cases} \exp[\lambda\alpha_1(t - t_1 + o(1))], & t \in [t_1, t_2], \\ \exp[-\lambda(t - t_3 - \alpha_1 + o(1))], & t \in [t_3, t_4], \\ \exp[-\lambda\alpha_2(t - t_5 + o(1))], & t \in [t_5, t_6], \\ \exp[\lambda\alpha(t - t_7 - \alpha_2/\alpha + o(1))], & t \in [t_7, t_8], \end{cases}$$

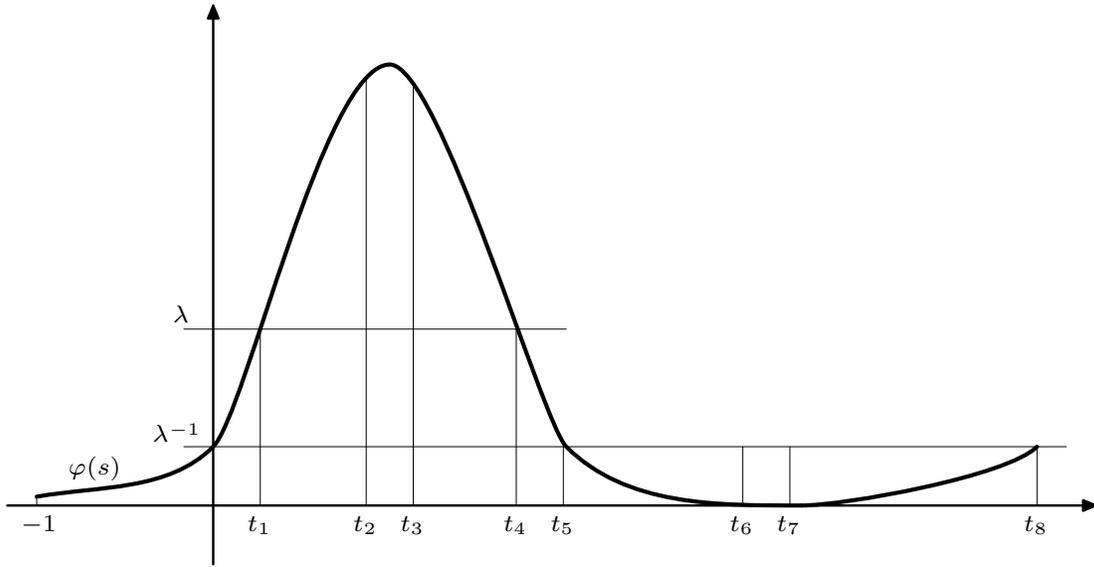


Рис. 1: Схематический график решения уравнения нейрона.

где

$$\begin{aligned}
 t_1 &= o(1), & t_2 &= 1, \\
 t_3 &= t_2 + o(1), & t_4 &= t_3 + \alpha_1, \\
 t_5 &= t_4 + o(1), & t_6 &= t_5 + 1, \\
 t_7 &= t_6 + o(1), & t_8 &= t_7 + \alpha_2/\alpha,
 \end{aligned}$$

а величины α_1 , α_2 определены формулами (3) и (4). Символом $o(1)$ обозначены слагаемые, стремящиеся при $\lambda \rightarrow \infty$ к нулю равномерно относительно выбора начальной функции $\varphi \in S$.

На рисунке 1 показан схематический график решения уравнения нейрона.

Длительность восходящего участка спайка (интервал $[t_1, t_2]$) равна единице (после нормировки за единицу времени принята постоянная времени задержки калиевого ионного тока). На этом участке скорость роста мембранного потенциала определяется величиной $\lambda\alpha_1$.

Параметр α_1 определяет длительность нисходящего участка спайка (интервал $[t_3, t_4]$). Из биологических соображений следует, что нисходящий участок спайка продолжительнее восходящего, т.е. выполнено неравенство $\alpha_1 > 1$. Скорость восстановления мембранного потенциала после спайка определяется величиной λ .

Длительность процесса перехода нейрона в состояние гиперполяризации (интервал $[t_5, t_6]$) оказывается единичной, а скорость

этого процесса определяется величиной $\lambda\alpha_2$. За гиперполяризацией следует участок медленного роста мембранного потенциала (интервал $[t_7, t_8]$), причем скорость деполяризации определяется величиной $\lambda\alpha$.

Начало и окончание спайка естественно связать с моментами пересечения решением $u(t)$ уровня $u = \lambda$ (с положительной и отрицательной скоростью соответственно), т.е. спайк начинается в момент времени t_1 и заканчивается в момент времени t_4 . Таким образом, величина

$$T_1 = 1 + \alpha_1, \quad (7)$$

определяет продолжительность спайка.

Для того, чтобы продолжить построение асимптотики для моментов времени $t > t_8$, заметим, что в этом случае функцию $u_8(t)$ следует рассматривать как новую начальную функцию $\varphi'(s)$ уравнения (1):

$$\varphi'(s) = u(t_8 + s) = \lambda^{-1} \exp(\lambda\alpha s), \quad s \in [-1, 0].$$

Эта функция входит в множество S допустимых начальных функций и, построив для нее асимптотическое решение на промежутке $[t_8, 2t_8]$, мы убедимся, что для очередной начальной функции $\varphi''(s) = u(2t_8 + s)$ имеет место асимптотическое равенство $\varphi''(s) = \varphi'(s)$. Таким образом, для произвольной начальной функции $\varphi \in S$ построенная асимптотика оказывается периодической функцией с периодом, равным $t_8 = T_2 + o(1)$, где

$$T_2 = 2 + \alpha_1 + \alpha_2/\alpha. \quad (8)$$

Построенная выше асимптотика $u(t)$ решения $u_\varphi(t)$ не зависит от начальной функции $\varphi \in S$. Соответственно, момент времени t_8 , в который асимптотика с положительной скоростью пересекает уровень $u = \lambda^{-1}$ также не зависит от выбора начальной функции. Точное решение $u_\varphi(t)$ уравнения (1), полученное для начальной функции $\varphi(s)$, будет с положительной скоростью пересекать уровень $u = \lambda^{-1}$ в момент времени $t_8(\varphi)$, зависящий, вообще говоря, от начальной функции φ .

Введем в рассмотрение оператор последования Π , действующий по следующему правилу:

$$\Pi[\varphi](s) = u_\varphi(t_8(\varphi) + s),$$

где $s \in [-1, 0]$ и $\varphi \in S$. Введем также более узкое множество $S' \subset S$ начальных функций $\varphi(s)$:

$$S' = \{ \varphi \in C[-1, 0] : \lambda^{-1} \exp(2\lambda\alpha s) \leq \varphi(s) \leq \lambda^{-1} \exp(\lambda\alpha s/2) \}. \quad (9)$$

Из выписанных выше асимптотических равенств вытекает, что $\Pi[S'] \subset S'$, откуда в силу теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки непрерывного оператора, действующего на выпуклом компактном множестве, следует существование такой начальной функции $\psi \in S'$, для которой $\Pi[\psi] = \psi$. В этом случае функция $u_\psi(t)$ будет являться периодическим решением уравнения (1) с периодом $t_8(\psi) = T_2 + o(1)$.

Решения уравнения (1) с начальными условиями из $\Pi[S']$ образуют аттрактор, которому принадлежит и периодическое решение $u_\psi(t)$. Все элементы $\varphi \in \Pi[S']$ имеют при $\lambda \rightarrow \infty$ одинаковую асимптотику $\varphi(s) = \exp[\lambda\alpha s + o(1)]$, т.е. аттрактор является очень «узким». Одновременно этот аттрактор имеет широкую область притяжения, поскольку имеет место включение $\Pi[S] \subset \Pi[S']$ т.е. включение $\Pi[\varphi] \in \Pi[S']$ соблюдается при весьма слабых условиях на начальную функцию φ . Вопрос о единственности и устойчивости периодического решения требует дальнейшего изучения.

Результаты приведенных выше рассуждений могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Если гладкие положительные функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно стремятся к нулю при $u \rightarrow \infty$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ решения уравнения (1) с начальными условиями из $\Pi[S']$ образуют аттрактор, область притяжения которого включает множество S . Все элементы аттрактора имеют общую асимптотику, описываемую теоремой 1. Аттрактор включает периодическое решение $u_\psi(t)$ уравнения (1) с периодом $T_2 + o(1)$, где T_2 определено формулой (8).*

Следующая теорема дает уточненную оценку периода:

Теорема 3. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемые положительные функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно убывают и пусть найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $u \rightarrow \infty$ выполнены следующие соотношения:*

$$f_{Na}(u) = O(u^{-1-\varepsilon}), \quad f_K(u) = O(u^{-1-\varepsilon}), \quad (10)$$

т.е. при $u \rightarrow \infty$ функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ стремятся к нулю быстрее, чем $O(u^{-1})$. Пусть также выполнены соотношения

$$f'_{Na}(0) = f'_K(0) = 0.$$

Тогда для периода T решения $u(t)$ уравнения (1) с начальной функцией $\varphi \in S'$ при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$T = T_2 + \Delta T + o(\lambda^{-1}),$$

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[\frac{f_K(u) - \alpha_1}{\alpha_1 - f_{Na}(u)} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - f_K(u)}{1 + f_{Na}(u)} \right] \frac{du}{u}, \quad (11)$$

где T_2 в соответствии с теоремой 2 определяется формулой (8).

Доказательство теоремы состоит в применении стандартного метода шагов, причем на каждом шаге для длины текущего интервала строится оценка, имеющая точность $o(\lambda^{-1})$.

В заключительном разделе второй главы приведено описание результатов компьютерного моделирования. Продемонстрировано наличие импульсного режима, параметры которого соответствуют теореме 1 об асимптотике нулевого порядка. Проведено сравнение асимптотических оценок периода решения (теорема 3) с результатами компьютерного моделирования. Продемонстрировано, что уже при не слишком больших значениях параметра λ полученная в теореме 3 оценка первого приближения для периода решения оказывается существенно точнее оценки нулевого приближения.

В третьей главе исследуются нейронные сети, состоящие из диффузионно связанных импульсных нейронов. Рассмотрим систему, состоящую из двух диффузионно связанных нейронов:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda L[u_1]u_1 + d(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda L[u_2]u_2 + d(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (12)$$

где u_k — мембранный потенциал k -го нейрона, а оператор $L[u]$ определен следующим образом:

$$L[u](t) = f_K(u(t-1)) - f_{Na}(u(t)) - 1. \quad (13)$$

Будем считать, что коэффициент разностной диффузии d мал по величине и согласован с параметром λ следующим образом:

$$d = \exp(-\lambda\sigma), \quad \sigma > 0. \quad (14)$$

Относительно параметра λ и функций $f_{\text{Na}}(u)$ и $f_{\text{K}}(u)$, входящих в выражение для оператора $L[u]$, будем считать выполненными предположения теоремы 1. В результате для уравнений, описывающих каждый нейрон в отдельности будут справедливы выводы теоремы 1.

При исследовании системы (12) приходится рассматривать целый ряд частных случаев. Сократить их число удастся, привлекая следующие биологические соображения: нисходящий участок спайка (продолжительностью α_1) длиннее восходящего (единичной продолжительности), а самым долгим является участок от точки минимума до начала следующего спайка (его продолжительность равна α_2/α). Учитывая зависимость продолжительностей участков спайка от параметров α , α_1 и α_2 , наложим на значения параметров следующие ограничения:

$$0 < \alpha < 1 < \alpha_1 < \alpha_2. \quad (15)$$

Отметим, что этими неравенствами накладываются требования, более жесткие, чем это необходимо для воспроизведения временной структуры спайка биологического нейрона. За счет этого без существенного ограничения общности модели достигается значительное сокращение числа вариантов, которые приходится рассматривать при исследовании динамики системы.

Для асимптотического интегрирования системы (12) необходимо задать начальные функции на интервале единичной длины. Для каждого нейрона можно задать эволюцию мембранного потенциала непосредственно перед спайком, но сами моменты начала спайков оказываются различными для разных нейронов. Поэтому асимптотика системы (12) строится с помощью следующего специфического метода. Пусть первоначально спайки первого и второго нейронов происходят в моменты времени $t = 0$ и $t = \xi$ соответственно, т.е. рассогласованы на величину ξ , где $0 < \xi < T_2$. Зададим начальные условия для каждого уравнения на своем временном интервале: на интервале $[-1, 0]$ для первого нейрона и на интервале $[\xi - 1, \xi]$ для второго нейрона. Пусть $u_1(s) = \varphi_1(s) \in S$ и $u_2(\xi + s) = \varphi_2(s) \in S$, где $-1 \leq s \leq 0$. Игнорируя неоднородное слагаемое, проинтегрируем первое из уравнений (12) на промежутке $0 \leq t \leq \xi$ и положим $\psi_1(s) = u_1(\xi + s)$ и $\psi_2(s) = \varphi_2(s)$ для $-1 \leq s \leq 0$. После этого при $t \geq \xi$ для системы (12) получается обычная начальная задача для начальных функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$, которую можно решать методом шагов.

Обозначим через t^1 и t^2 моменты начала новых спайков первого и второго нейронов соответственно. Асимптотический анализ показывает, что главные члены асимптотики t^1 и t^2 при $\lambda \rightarrow \infty$ однозначно определяются по начальному рассогласованию ξ и не зависят от $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ (это существенно, поскольку в рамках асимптотики нулевого порядка мы не можем исследовать вопрос об устойчивости периодического решения). Поскольку оказываются справедливыми включения $u_1(t^1 + s) = \varphi'_1(s) \in S$ и $u_2(t^2 + s) = \varphi'_2(s) \in S$, то мы фактически возвращаемся к первоначальной ситуации, но рассогласование начала спайков теперь равно $\xi' = t^2 - t^1$, а начальная задача имеет вид $u_1(s) = \varphi'_1(s)$, $u_2(s) = \varphi'_2(s)$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\Pi : \{\xi, \varphi_1(s), \varphi_2(s)\} \rightarrow \{\xi', \varphi'_1(s), \varphi'_2(s)\}.$$

Оказывается, что одномерная составляющая этого отображения представима в виде $\xi' = f(\xi) + o(1)$, причем главная часть $\xi' = f(\xi)$ этого одномерного отображения имеет грубую устойчивую неподвижную точку ξ^* . В результате для системы (12) можно сделать вывод о существовании аттрактора, содержащего периодическое решение, в котором начала спайков первого и второго нейронов рассогласованы на величину $\xi^* + o(1)$.

Ограничим допустимые значения параметра σ неравенством $0 < \sigma < \sigma_1$, где

$$\sigma_1 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 \alpha) / 2, \quad (16)$$

т.е. будем рассматривать только случай достаточно сильного взаимодействия. Оказывается, что на этом диапазоне значений параметра σ с точки зрения асимптотики нулевого порядка точно функция $f(\xi)$ является кусочно-линейной, причем число линейных участков зависит от значения параметра σ . Тем не менее, при $\lambda \rightarrow \infty$ для всех $0 < \sigma < \sigma_1$ выполнено включение $\varphi'_1(s) \in S$, $\varphi'_2(s) \in S$, а отображение $\xi' = f(\xi)$ имеет в зависимости от значения параметра σ одну или две неподвижные точки. Во всех случаях отображение в некоторой окрестности неподвижной точки оказывается постоянным, что гарантирует устойчивость неподвижной точки.

Для решений, образующих аттрактор, асимптотические формулы для восходящего и нисходящего участков спайков и асимптотика продолжительности спайка оказываются такими же, что и в

теореме 1 для изолированного нейрона. Мы ограничимся наиболее важными асимптотическими выражениями для временного рассогласования спайков. Неподвижная точка ξ^* (или одна из таких точек, если их две) отображения $\xi' = f(\xi)$ задается формулой:

$$\xi^* = \begin{cases} \sigma\alpha_1^{-1}, & 0 < \sigma < \alpha_1, \\ 1 + (\sigma - \alpha_1)\alpha^{-1}, & \alpha_1 \leq \sigma < \sigma_1. \end{cases} \quad (17)$$

Для $0 < \sigma \leq \sigma_0$, где $\sigma_0 = \alpha_1 + \alpha_1\alpha$, отображение $\xi' = f(\xi)$ имеет две устойчивые неподвижные точки, которым соответствуют два различных аттрактора исходной системы. Для одного из этих аттракторов начало спайка второго нейрона запаздывает по отношению к началу спайка первого нейрона на время $\xi^* + o(1)$, а начало следующего спайка первого нейрона запаздывает по отношению к началу спайка второго нейрона на $\eta^* + o(1)$, где

$$\eta^* = \begin{cases} T_2 - (\alpha_2\alpha_1^{-1} - 1)\sigma\alpha^{-1} - \sigma\alpha_1^{-1}, & 0 < \sigma < \alpha_1, \\ \alpha_1 + 1 + [\alpha_1 - (\sigma - \alpha_1)\alpha^{-1}]\alpha^{-1}, & \alpha_1 \leq \sigma < \sigma_0, \\ 1 + (\sigma - \alpha_1)\alpha^{-1}, & \sigma_0 \leq \sigma < \sigma_1, \end{cases} \quad (18)$$

причем $\eta^* > \xi^*$. Соседние по времени спайки каждого из нейронов рассогласованы на величину $\xi^* + \eta^* + o(1) < T_2$. Одновременно существует второй аттрактор, соответствующий случаю обратной последовательности спайков, т.е. ситуации, когда нейроны «поменялись местами».

Для $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ отображение $\xi' = f(\xi)$ имеет единственную устойчивую неподвижную точку и локально постоянно в ее окрестности, а описанные выше аттракторы объединяются в один. Для входящих в него решений рассогласование начала спайков первого и второго нейронов совпадает с запаздыванием спайка первого нейрона относительно спайка второго и составляет $\xi^* + o(1)$, а каждый из нейронов генерирует спайки через время $2\xi^* + o(1)$. Данный аттрактор естественно назвать симметрическим.

Полученные результаты согласуются с биологическими данными о том, что электрическое взаимодействие способствует синхронизации колебаний двух нервных клеток. Локальное постоянство отображения $\xi' = f(\xi)$ свидетельствует о том, что синхронизация (со сдвигом по фазе) наступает практически за один такт колебаний.

Вопрос о наличии аттракторов, отличных от описанных выше, остается открытым. В частности, на основе полученной выше

асимптотики нулевого порядка не удастся исследовать вопрос об устойчивости однородного режима $u_1(t) = u_2(t + o(1))$ с малым рассогласованием спайков, поскольку он соответствует негрубому случаю. При этом для малых положительных ξ функция $f(\xi)$ оказывается тождественной, так что для исследования поведения итераций отображения Π оказывается необходимым учитывать зависящие от λ поправки к функции $f(\xi)$.

Описанные выше результаты, относящиеся к структуре колебаний в системе из двух диффузионно связанных нейронов, можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 4. *В предположениях теоремы 1 относительно оператора $L[u]$ система (12), в которой параметры удовлетворяют условиям (15), а коэффициент разностной диффузии выбран в соответствии с (14) и условием $0 < \sigma < \sigma_1$, имеет при $\lambda \rightarrow \infty$ аттрактор, содержащий периодическое решение, для которого временное рассогласование спайков первого и второго нейронов равно ξ^* , а рассогласование спайков второго и первого нейронов равно η^* , где величины σ_1 , ξ^* , η^* определены соотношениями (16), (17) и (18).*

Доказательство теоремы состоит в непосредственном нахождении асимптотики решения системы (12) и явном вычислении одномерного отображения $f(\xi)$. Построение асимптотики системы (12) проводится с помощью метода шагов и основывается на следующей важной лемме о факторизации.

Лемма 1. *Замена системы (12) на систему вида*

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda L[u_1]u_1 + \Theta[du_2 - u_1]du_2, \\ \dot{u}_2 &= \lambda L[u_2]u_2 + \Theta[du_1 - u_2]du_1, \end{aligned} \tag{19}$$

эквивалентна возмущению оператора $L[u]$, имеющему порядок $O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Таким образом, при построении асимптотики нулевого порядка можно считать, что взаимодействие имеет место только в те моменты времени, когда потенциал одного из нейронов значительно (в $d^{-1} = \exp(\lambda\sigma)$ раз) превышает потенциал другого нейрона. Если это условие не выполнено, то система распадается на независимые уравнения. Из доказанной леммы непосредственно следует, что

на каждом шаге для главных членов асимптотики получается треугольная система уравнений, которая легко интегрируется. Таким образом, асимптотика может быть построена на любом конечном промежутке времени.

Рассмотрим поведение сети из трех одинаковых нейронов, в которой все нейроны попарно связаны между собой диффузионными связями. Динамика такой сети описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= \lambda L[u_1]u_1 + d(u_2 - u_1) + d(u_3 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda L[u_2]u_2 + d(u_1 - u_2) + d(u_3 - u_2), \\ \dot{u}_3 &= \lambda L[u_3]u_3 + d(u_1 - u_3) + d(u_2 - u_3),\end{aligned}\tag{20}$$

где u_k — мембранный потенциал k -го нейрона, Будем считать, что для оператора $L[u]$ выполнены предположения теоремы 1, а коэффициент разностной диффузии d удовлетворяет соотношению (14).

Асимптотическое исследование показывает, что при $0 < \sigma < \sigma_1$ спайк произвольно выбранного главного нейрона через время $\xi^* + o(1)$ вызывает спайки двух соседних нейронов. Процесс генерации спайков циклически повторяется через временной интервал $\xi^* + \eta^* + o(1)$. Такой режим будем называть режимом типа «ведущий центр».

Наряду с ведущим центром при $\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 - 1)/2 < \sigma < \alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha\alpha_1 - \alpha)/(1 + 2\alpha)$ существуют режимы типа «бегущих волн». В зависимости от направления распространения спайк j -ого нейрона происходит раньше или запаздывает по отношению к спайку нейрона с номером $(j + 1) \bmod 3$ на время $\xi^* + o(1)$. Полный оборот волна совершает за время $3\xi^* + o(1)$, причем за это время каждый нейрон генерирует один спайк.

Рассмотрим на плоскости конечную решетку Ω , состоящую из правильных треугольных ячеек. Введем произвольную нумерацию узлов решетки и в каждом узле разместим по нейрону. Будем считать, что нумерация нейронов согласована с нумерацией узлов решетки. Любой внутренний узел решетки Ω оказывается смежным с шестью другими узлами. Будем считать, что два нейрона взаимодействуют, если они расположены в смежных узлах решетки. Таким образом, множество номеров нейронов, связанных j -ым нейроном, совпадает с множеством номеров узлов, смежных с j -ым узлом решетки.

Пусть $\alpha_1 + (\alpha_1 - 1)\alpha/2 < \sigma < \alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha\alpha_1 - \alpha)/(1 + 2\alpha)$. В этом случае по элементарным ячейкам могут распространяться

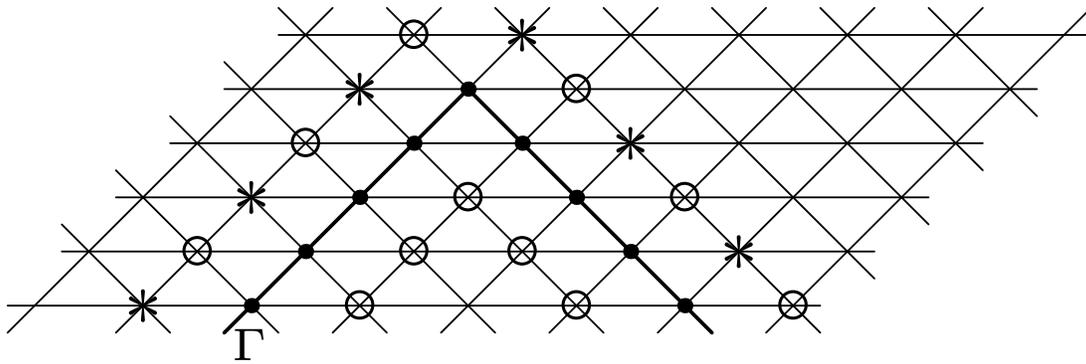


Рис. 2: Распространение спайков по элементарным ячейкам сети.

волны спайков, а взаимодействие волн может привести к регулярным колебаниям, имеющим сложную структуру. Рассмотрим на решетке произвольно фиксированную кривую γ . Каждую точку этой кривой можно включить в элементарный путь проведения возбуждения. Если для соседних точек кривой элементарные пути проведения возбуждения имеют общие узлы, то (во всяком случае, на конечном промежутке времени) существует колебательный режим, в котором спайки нейронов, расположенных на γ , начинаются практически синхронно. Соседние по времени спайки нейронов на γ следуют через промежуток $3\xi^* + o(1)$. Сказанное иллюстрирует рис. 2, на котором нейроны, расположенные на γ , помечены точками. Их синхронные спайки через время $\xi^* + o(1)$ приводят к спайкам нейронов, изображенных окружностями. Последние спустя еще время $\xi^* + o(1)$ индуцируют спайки нейронов, помеченных звездочками. После этого события спустя время $\xi^* + o(1)$ снова начинаются спайки нейронов, лежащих на γ . Таким образом, практически любую кривую можно сделать повторяющимся фронтом начала спайков.

Биологическая интерпретация явления связана с гипотезой о волновом кодировании информации в мозге. Локальная сеть способна хранить сложные волновые пакеты до их дальнейшей обработки. При этом не нужна требующая времени модификация синаптических весов. Соответствующие колебательные режимы самоорганизуются в зависимости от начальных условий, которые можно задать внешним воздействием. Тем самым, локальная сеть является моделью кратковременной памяти, основанной на автоволновых принципах. В случае, когда описанные колебательные режимы существуют лишь на конечном промежутке времени, их разрушение можно трактовать как процесс забывания образов.

В заключительном разделе третьей главы приведено описание

результатов компьютерного моделирования, относящихся к случаю диффузионного взаимодействия нейронов. Продемонстрировано наличие симметричного режима, структура которого описывается теоремой 4. Дополнительно при небольших значениях параметра λ ($\lambda \approx 3$) численно продемонстрировано существование сложных многообходных аттракторов, претерпевающих взаимное превращение при изменении значения параметра d . Отметим, что существование таких аттракторов по-видимому является эффектом конечного параметра, поскольку при больших значениях параметра λ ($\lambda > 5$) многообходных аттракторов обнаружить не удалось.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих журналах, включенных в перечень ВАК:

1. Кащенко, С.А. Колебания в системах уравнений с запаздыванием и разностной диффузией, моделирующих локальные нейронные сети / Кащенко С.А., Майоров В.В., Мячин М.Л. // Докл. РАН – 1995 – т. 344, № 3 – с. 1274–1279.
2. Майоров, В.В. Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона / Майоров В.В., Мячин М.Л., Парамонов И.В. // Моделирование и анализ информационных систем – Ярославль, 2008 – т. 15, № 2 – с. 61–66.
3. Кащенко, С.А. Многообходные аттракторы в системе двух и трех диффузионно-связанных нейронов, описываемых уравнениями с запаздыванием / Кащенко С.А., Майоров В.В., Мячин М.Л. // Моделирование и анализ информационных систем – Ярославль, 2008 – т. 15, № 2 – с. 72–74.
4. Дунаева, О.А. Исправления и дополнения к статье «Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона» / Дунаева О.А., Мячин М.Л. // Моделирование и анализ информационных систем. Сб. научн. трудов – Ярославль, 2009 – т. 16, № 3 – с. 46–57.

Другие публикации:

5. Мячин, М.Л. Комплексный анализ сложной динамики системы, моделирующей сальтаторное проведение нервного импульса / Мячин М.Л. // Моделирование и анализ информационных систем. Сб. научн. трудов – Ярославль, 1996 – вып. 3 – с. 48–55.
6. Майоров, В.В. О поправке к периоду решения уравнения с запаздыванием, описывающего динамику нейрона / Майоров В.В., Мячин М.Л., Парамонов И.В. // Математика в Ярославском госуниверситете. Материалы Всеросс. научной конференции, посвященной 200-летию Ярославского гос. Университета им. П.Г. Демидова. – Ярославль, 2003 – с. 45–46
7. Майоров, В.В. Планирование волн в кольцевых структурах ассоциаций импульсных нейронов-детекторов / Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Куксов А.Г., Мячин М.Л. // Моделирование и анализ информационных систем. Сб. научн. трудов – Ярославль, 2003 – т. 10, № 2 – с. 30–34.
8. Майоров, В.В. Планирование волн в кольцевых структурах ассоциаций импульсных нейронов-детекторов / Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Куксов А.Г., Мячин М.Л. // Математика в Ярославском госуниверситете. Материалы Всеросс. научной конференции посвященной 200-летию Ярославского гос. Университета им. П.Г. Демидова. – Ярославль, 2003 – с. 46-51.
9. Майоров, В.В. Планирование волн в кольцевых структурах ассоциаций импульсных нейронов-детекторов / Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Мячин М.Л., Куксов А.Г. // Научная сессия МИФИ-2003 – ч. 2, Нейроинформатика-2003 – с. 11–18.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.