На правах рукописи

КУЛИКОВ ДМИТРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ И ЕГО КОНЕЧНОМЕРНОГО АНАЛОГА

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Ярославль 2006

Работа выполнена на кафедре дифференциальных Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель

доктор физико - математических наук,
профессор Колесов Андрей Юрьевич

Официальные оппоненты:

доктор физико - математических наук,
профессор Розов Николай Христович

доктор физико - математических наук,
профессор Кубышкин Евгений Павлович

Ведущая организация

Самарский государственный университет

Защита состоится "   " декабря 2006 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета К 212.002.02 в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Автореферат разослан "   "ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Иродова И.П.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Современные методы качественного анализа дифференциальных уравнений берут свое начало в работах А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, Г.Д. Биркгофа, А.А. Андронова. Эти методы стали актуальными, когда во многих разделах физики и в других естественных науках стало понятным, что линейный подход не может дать полновестного описания большого числа явлений, а линеаризация дает слишком грубое приближение. В радиофизике важность нелинейного подхода была воспринята начиная с работ А.А. Андронова, Ван дер Поля. Нелинейный подход к физико – химическим и биологическим системам, начатый в работах И. Пригожина и А. Тьюринга привел к созданию нового направления в науке – синергетике.

Начиная с работ Ван дер Поля, Дуффинга, неоднократно отмечалось, что наряду с изучением общей закономерности нелинейной динамики полезно рассмотрение некоторого количества конкретных динамических систем. Их анализ часто позволял с одной стороны проиллюстрировать накопленные методы качественной теории динамических систем, а с другой стороны часто подталкивал к созданию новых приемов и методик. Для этого достаточно вспомнить уравнение Ван дер Поля, систему уравнений Лоренца, исследованию которых посвящено большое число публикаций. Особенно убедительно при этом упоминание системы уравнений Лоренца и ее обобщений, изучение которой подтолкнуло к созданию нового направления качественной теории дифференциальных уравнений – хаотической динамики.

В работе рассматривается одно нелинейное уравнение в частных производных, которое являлось и является объектом большого числа исследований. Даже краткий обзор таковых в рамках автореферата практически невозможен. Достаточно подробную библиографию можно найти, например, в монографиях и работах Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничего, А.Ю. Колесова, Ю.С. Колесова, Н.Х. Розова, Г.Г. Малинецкого, А.Б. Потапова и других авторов.

В диссертационной работе для этого уравнения использовано название уравнение Гинзбурга – Ландау. Часто это уравнение именуют уравнением Курамото – Цузуки. Это же уравнение часто возникает при анализе параболических систем. Частный его случай встречается при рассмотрении и гиперболических краевых задач. Поэтому для этого уравнения оправданно употребление термина "квазинормальная форма."Выбор первого названия продиктован частотой его исследования в литературе как отечественной, так и иностранной. Данное уравнение встречается во многих физических приложениях: теории сверхпроводимости, нелинейной оптике, гидродинамике и т.д.

В работе для уравнения Гинзбурга – Ландау рассмотрены две задачи. В первой главе рассмотрено малоразмерное его приближение, которое можно трактовать как простейшую разностную аппроксимацию двух краевых задач для этого уравнения. Изучению малоразмерных приближений традиционно уделялось большое внимание, например, при численном анализе динамики. Численному анализу малоразмерных приближений было посвящено большое число исследований. В случае, когда соответствующая система была получена с помощью галеркинских приближений, она численно исследовалась в цикле работ А.А. Самарского, С.П. Курдюмова, Г.Г. Малинецкого, Т.С. Ахромеевой, Н.А. Магницкого, С.В. Сидорова. В случае разностной аппроксимации здесь можно отметить работы С.Д. Глызина, С.П. Кузнецова, А.П. Кузнецова и их учеников, Д. Аронсона, Г.Эрметроу, Н. Копелля, М. Поляшенко. Часть результатов этих работ была получена аналитически.

В диссертационной работе была поставлена задача найти все автомодельные периодические решения и изучить их локальные бифуркации, что весьма полезно для дальнейших исследований уже и хаотической динамики.

Во второй главе изучается уравнение в частных производных, которое можно рассматривать как частный случай уравнения Гинзбурга – Ландау. К нему можно прийти от широко известного нелинейного уравнения Шредингера, если учесть слабую диссипацию. Такие варианты уравнения Гинзбурга – Ландау (обобщенного уравнения Шредингера) встречаются в нелинейной оптике.

Изучению динамики решений различных краевых задач, для данного уравнения (самого уравнения Гинзбурга – Ландау и его модификаций) посвящено большое число исследований, но среди них преобладают варианты, когда пространственная переменная одна. В плоских областях данное уравнение рассматривалось уже гораздо реже.

В диссертации рассмотрен случай цилиндрической области, где изучена задача о бифуркациях плоских бегущих волн. Эта задача ранее не рассматривалась.

Цели и задачи диссертации. Целью исследований диссертационной работы состояла в аналитическом исследовании существования простейших аттракторов, а также их свойств. Так для малоразмерной аппроксимации уравнения Гинзбурга – Ландау предполагалось найти все автомодельные периодические решения. Второй целью было изучение структуры их окрестности, т.е. вопросов связанных с их устойчивостью и локальными бифуркациями.

Во многом аналогичная цель преследовалась и для уравнения с частными производными – нелинейного обобщенного кубического уравнения Шредингера. Для краевой задачи в цилиндрической области простейшими инвариантными множествами можно считать плоские бегущие волны. Объектом исследований было изучение структуры окрестности этих решений, т.е. задача во многом аналогична той, которая ставится и в первой главе диссертации.

Научная новизна. Для конечномерного аналога уравнения Гинзбурга – Ландау аналитически найдены все автомодельные периодические решения. Понятно, что тривиальные случаи (синхронный и противофазный циклы) отмечались и ранее. Новый набор автомодельных решений составили асимметричные циклы. Явные аналитические формулы для них, в частности, позволили изучить их устойчивость, а также локальные бифуркации от них.

Задача из второй главы диссертации ранее не изучалась.

Положения, выносимые на защиту.

1. Аналитически найденные автомодельные периодические решения – асимметричные решения.

2. Устойчивость и локальные бифуркации автомодельных периодических решений.

3. Существование, устойчивость и локальные бифуркации плоских бегущих волн у нелинейного обобщенного уравнения Шредингера (слабо диссипативный вариант уравнения Гинзбурга – Ландау) в цилиндрической области.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты первой главы в значительной мере могут служить базой для дальнейшего изучения сложной и хаотической динамики рассмотренного уравнения. Они позволили с новых позиций рассмотреть известную задачу о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга.

Результаты второй главы находятся в общем русле изучения нелинейной динамики волновых процессов, где эта динамика существенным образом зависит от рассматриваемой области. Для исследования этой задачи применены современные методы качественной теории дифференциальных уравнений с бесконечномерным фазовым пространством.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (руководители профессор С.А. Кащенко и доцент С.Д. Глызин), на Всероссийской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений, посвященной 100 - летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ, профессора И.П. Макарова (Рязань, 9 – 13 октября, 2006 г.), на конференции молодых ученых "Нелинейные волновые процессы"(Н. – Новгород, 1 – 7 марта, 2006 г.). Доклад на конференции в Н. – Новгороде на тему "Автомодельные периодические решения двухточечной разностной аппроксимации уравнения Гинзбурга – Ландау"был отмечен премией оргкомитета (председатель оргкомитета конференции, действительный член РАН А.В. Гапонов – Грехов).

Публикации. Основные результаты отражены в 8 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1 – 3] опубликованы в изданиях, включенных в перечень ВАКа.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы и двух приложений. Общий объем диссертационной работы 115 страниц.

Первая глава разделена на 7 параграфов и содержит 7 рисунков и 4 таблицы. Вторая глава разделена на 4 параграфа.

Два приложения относятся к главе I и содержат текст программ, написанных на языке Pascal в среде Delphi 5.0.

Список литературы содержит 69 наименований.

Содержание работы. Во введении отражается актуальность темы диссертации. Приведен обзор литературы, непосредственно относящийся к тематике диссертации. Значительную часть цитированной литературы составляют фундаментальные монографии, вышедшие в последние годы. Дано краткое, а затем развернутое описание основных результатов.

В §1.1 (в первом параграфе первой главы) вводится то уравнение, которое является объектом исследования первой части диссертации:

$$\dot{\xi} = d\exp(-i\alpha)D\xi + \xi - (1+ic)\xi|\xi|^2. \tag{1}$$

Здесь $d \in R_+$ $(d \in R, d > 0),\ c \in R, \alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$;

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix},\ \xi|\xi|^2 = \begin{pmatrix} \xi_1|\xi_1|^2 \\ \xi_2|\xi_2|^2 \end{pmatrix},$$

а $\xi_1(t), \xi_2(t)$ – комплекснозначные функции.

В §1.1 приведена мотивация рассмотрения уравнения (1). Отмечен ряд общих свойств его решения (например, диссипативность). Введен класс тех решений, которые изучаются в первую очередь:

$$\xi(t) = y\exp(i\sigma t)\ (y \in \mathbb{C}^2,\ \sigma \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

В §1.2 рассмотрено самое простое из возможных автомодельных периодических решений. Это полностью синхронизированный цикл (цикл Андронова – Хопфа). Он задается формулой

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-ict). \tag{3}$$

Рассмотрен вопрос об его устойчивости и локальных бифуркациях. Результаты относящиеся к устойчивости этого цикла, безусловно, отмечались многими авторами и приведены для удобства изложения других результатов, в том числе результатов следующих параграфов (при $d > d_1$ – цикл Андронова – Хопфа устойчив, при $d < d_1$ – неустойчив, $d_1 = c\sin\alpha - \cos\alpha$).

Исследование бифуркационной задачи основано на применении метода нормальных форм Пуанкаре – Дюлака, адаптированного к данной задаче, и приводит к анализу вспомогательного уравнения

$$\dot{\rho} = \varepsilon\varkappa\rho + b\rho^3.$$

Здесь $\rho = \rho(t) \in \mathbb{R}$, $\varkappa$ – положительная постоянная. Поэтому характер бифуркаций определяет знак постоянной b (ляпуновской величины). Приведена формула для b, а также анализ знака этой постоянной.

Основной результат §1.2 сформулирован в теореме 1.1.

Теорема 1.1. *При $d = d_1 - \varepsilon$ ($|\varepsilon| < \varepsilon_0$) от цикла Андронова – Хопфа бифурцируют два цикла, если*

$$1)\varepsilon > 0,\ b < 0 \text{ и } 2)\varepsilon < 0,\ b > 0.$$

В первом случае оба бифурцирующих цикла устойчивы и они оба неустойчивы во втором.

Приведено разбиение плоскости параметров на области знакопостоянства постоянной b.

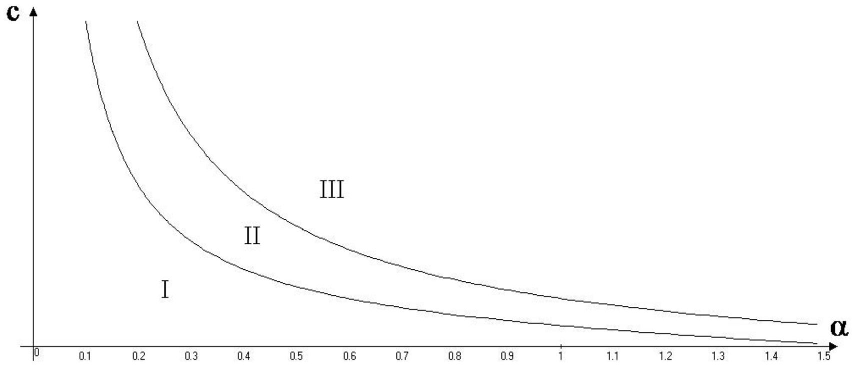

Рис 1.1

На рис. 1 в области III справедливо неравенство $b < 0$, в области II – $b > 0$. Область I выделяет те α и c, для которых $d_1 < 0$, т.е. цикл Андронова – Хопфа не может терять устойчивость.

В §1.3 рассматривается бифуркационная задача для противофазного цикла

$$\xi(t) = \rho_a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\sigma_a t),$$

где $\rho_a^2 = 1 - 2d\cos\alpha$, $\sigma_a = 2d\sin\alpha - \rho_a^2 c$. Он существует, если $1 - 2d\cos\alpha > 0$. Замена

$$\xi(t) = \rho_a(t)\exp(i\sigma_a t)[g_1 + g_1 v] \tag{4}$$

сводит вопрос об его устойчивости, а затем и его бифуркациях к аналогичным вопросам для нулевого решения уравнения

$$\dot{v} = -d\exp(-i\alpha)Dv - (1+ic)\rho_a^2[v + \overline{v} + 2v\overline{v} + v^2 + v|v|^2], \tag{5}$$

В формулах (4), (5) умножение векторов покоординатное.

При предположении о неотрицательности d_1 потеря устойчивости нулевого решения происходит колебательным образом при $d = d_2 = 1/4\cos\alpha$ (при $4d\cos\alpha < 1$ противофазный цикл устойчив и он неустойчив, если $4d\cos\alpha > 1$).

Положив в уравнении (5) $d = d_2 + \varepsilon$ приходим к бифуркационной задаче, решение которой сводится в конечном итоге к применению классической теоремы Андронова – Хопфа. От нулевого состояния равновесия бифурцирует цикл с амплитудой порядка ε, а характер бифуркаций (жесткое или мягкое возбуждение колебаний) определяется знаком ляпуновской величины. Для рассматриваемого уравнения (1) последнее означает наличие жесткой или мягкой бифуркации двумерных инвариантных торов (теорема 1.2 из §1.3 диссертации). На рис. 2(см. с. 10) в области $B_1(\alpha, c)$ мягко бифурцируют инвариантные торы, в области C_1 жестко бифурцируют инвариатные торы. Наконец, область A_1 – это область тех значений параметров, для которых не реализуется колебательная потеря устойчивости.

В §1.4 изложен один из основных результатов первой главы диссертации. Речь идет о существовании автомодельных циклов, отличных от цикла Андронова – Хопфа и противофазного. Их достаточно часто именуют асимметричными.

Положим

$$y_j = \rho_j\exp(i\varphi_j)(j=1,2), \psi = \varphi_2 - \varphi_1,\ \lambda = \rho_2/\rho_1, \rho_1^2 = R/\lambda, \rho_2^2 = R\lambda.$$

Выбрав y_1, y_2 таким образом, подставим решение вида (2) в дифференциальное уравнение (1). В итоге получим систему двух комплексных уравнений

$$i\sigma = d\exp(-i\alpha)(-1+\lambda\exp(i\psi)) + 1 - (1+ic)R/\lambda,$$

$$i\sigma = d\exp(-i\alpha)(-1+\exp(-i\psi)/\lambda) + 1 - (1+ic)R\lambda.$$

Считая, что $\lambda \neq 1$ (при $\lambda = 1$ получаем ранее найденные циклы), после серии преобразований и замен вопрос о сосуществовании асимметричных циклов оказывается может быть сведен к исследованию корней квадратного уравнения

$$\eta^2 + (4p - q^2(1+h^2))\eta + 4(p^2 - q^2) = 0,$$

где $p = 1 + \cos^2\alpha - c\sin\alpha\cos\alpha, q = d_1(1 - d\cos\alpha)/d, h = b_1/d_1$, $d_1 = c\sin\alpha - cos\alpha, b_1 = c\cos\alpha + \sin\alpha, \lambda + 1/\lambda = \sqrt{\eta + 4}$.

Основной результат §1.4 сформулирован ниже.

Теорема 1.3. *Каждому положительному корню определяющего квадратного уравнения, для которого дополнительно выполнено неравенство*

$$(\eta + 2p)q > 0,$$

соответствуют два асимметричных автомодельных решения.

В §1.4 приведены формулы восстанавливающие параметры этих циклов.

В данном параграфе показано, что при $d \in (0; d_1)$ определяющее квадратное уравнение может иметь лишь один подходящий корень, а, следовательно, уравнение (1) – два асимметричных цикла. При $d > d_1$ может быть их четыре.

Полезно добавить, что, если ляпуновская величина b для однородного цикла (см. §1.2) меньше нуля, то при $d = d_1 - \varepsilon$ от этого цикла бифурцируют как раз два асимметричных цикла. Интересно отметить также, что при $d = d_1$ один из корней определяющего квадратного уравнения равен нулю, а $\eta_2 = pb/d_1^2$, где b и есть ляпуновская величина из §1.2.

В §1.5 рассмотрен вопрос об устойчивости и бифуркациях от асимметричных циклов. Как и в §§1.2 – 1.3 для циклов Андронова – Хопфа и противофазного вопрос об устойчивости асимметричных циклов удается свести к исследованию устойчивости состояния равновесия вспомогательной системы. В свою очередь, исследование устойчивости такого состояния равновесия стандартным образом сводится к анализу расположения корней характеристического уравнения. В конечном итоге, все свелось к применению критерия Рауса – Гурвица, а, следовательно, к анализу четырех неравенств. Их исследование показало, что существует такое $d = d_3(\alpha, c)$, что при $d \in (0; d_3(\alpha, c))$ эти решения неустойчивы, а при $d > d_3(\alpha, c)$ устойчивы. При $d = d_3(\alpha, c)$ происходит смена устойчивости у асимметричного цикла и у соответствующего ему состояния равновесия вспомогательной системы. При этом эта потеря устойчивости состояния равновесия происходит колебательным образом, т.е. при $d = d_3(\alpha, c)$ спектру устойчивости этого состояния равновесия принадлежит пара чисто мнимых собственных значений $\pm i\nu$ $(\nu > 0)$, а третье – действительно и лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Пусть теперь $d = d_3(\alpha, c) - \varepsilon$ $(|\varepsilon| << 1)$. В этом случае, используя аппарат теории нормальных форм, показано, что от асимметричного цикла бифурцирует двумерный инвариантный тор. В §1.5 приведено разбиение плоскости параметров α, c на области, где инвариантный тор бифурцирует мягко (при $\varepsilon > 0$ и он устойчив) или жестко (при $\varepsilon < 0$ и бифурцирующий тор неустойчив).

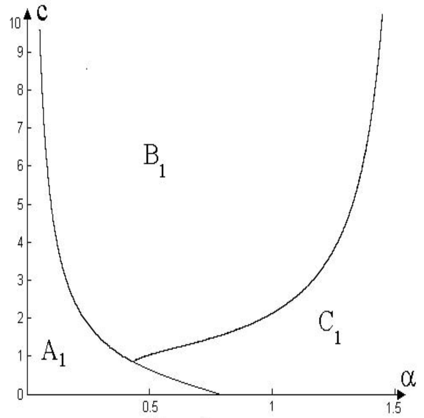

Рис. 2

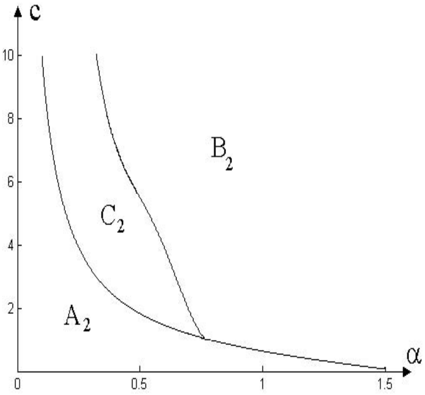

Рис. 3

Область A_2 образуют те пары (α, c), для которых невозможна колебательная потеря устойчивости. При $(\alpha, c) \in B_2$ мягко бифурцируют инвариантные торы, а при $(\alpha, c) \in C_2$ – жестко.

В §1.6 рассмотрены два особых случая: $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$. Второй случай часто именуют волновым, так как такой вид приобретает уравнение (1), если к нему приходим от рассмотрения краевых задач для уравнений гиперболического типа. При таком выборе α цикл Андронова – Хопфа устойчив, если $d > c$ и неустойчив, если $d < c$. Противофазный цикл существует и устойчив при любом выборе c и d. Вопрос об асимметричных циклах также сводится к рассмотрению квадратного уравнения. Результаты его анализа приведены на рис.4.

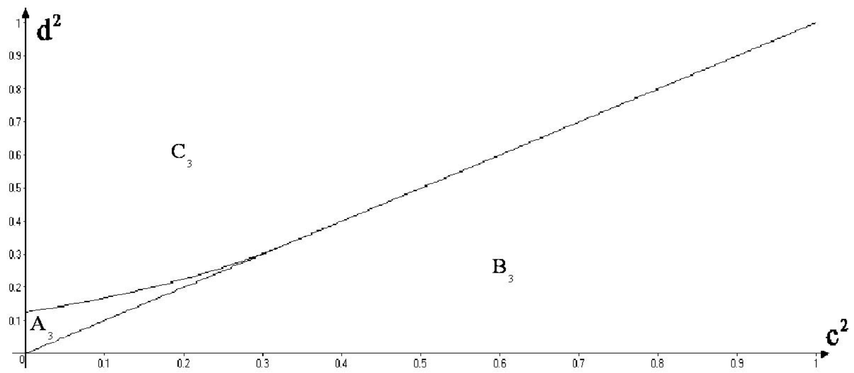

Рис. 4

На рис. 4 выделены области параметров (c, d), где имеются два цикла – B_3, четыре – A_3 и где их нет вовсе – C_3.

Как и в общем случае, удалось показать для каждого асимметричного цикла существование такой положительной постоянной $d = d_3(c)$, что при $d \in (0; d_3)$ этот цикл неустойчив, а при $d > d_3$ он уже устойчив. Положив далее $d = d_3 - \varepsilon$ $(|\varepsilon| << 1)$, приходим к бифуркационной задаче. Оказалось, что при $\varepsilon > 0$ от соответствующего асимметричного цикла бифурцирует асимптотически устойчивый двумерный тор.

Пусть $\alpha = 0$. В этом случае асимметричные циклы могут существовать лишь при $\alpha \in (0; 1)$, при $d \in (0; 1/3)$ их два, а при $d \in (1/3; 1)$ их может быть и четыре, если $c > 0$, а $d \in (1/3; (1 + c^2)/(c^2 + 4c + 1))$. Интересно отметить, что при $\alpha = 0$ асимметричные циклы всегда неустойчивы. В одной из работ Д. Аронсона, Г. Эрметроу, Н. Копелля рассмотрен только этот частный случай. Иным способом получен аналогичный результат.

Следующий и последний параграф первой главы диссертации посвящен рассмотрению широко известной задачи о взаимодействии двух идентичных слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга.

Итак, в ней рассматривается система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + x_1^2\dot{x}_1 + bx_1^3 + \varepsilon\gamma(x_1 - x_2) + \varepsilon\beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0, \\
&\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + x_2^2\dot{x}_2 + bx_2^3 + \varepsilon\gamma(x_2 - x_1) + \varepsilon\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $b, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta = const > 0$, а ε – малый положительный параметр. При $\gamma = \beta = 0$ система (6) представляет собой два полностью идентичных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга. Два последних слагаемых отвечают за наличие связи между осцилляторами.

В §1.7 показано, что в достаточно малой окрестности нулевого решения системы (6) и при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ ее динамика определяется уравнением (1), которое для системы (6) оказывается ее нормальной формой. Поэтому основные результаты §§1.2 – 1.6 практически дословно переносятся на систему (6).

Глава II посвящена изучению краевой задачи уравнения Гинзбурга – Ландау в частном случае. Такой вариант этого уравнения часто называют обобщенным кубическим уравнением Шредингера.

В §2.1 приведена постановка задачи, рассмотренной во второй главе. В ней рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{gathered} u_t = u - (1+ic)u|u|^2 - id\Delta u, \\ u(t,x+2\pi,z) = u(t,x,z), u_z|_{z=0} = u_z|_{z=l} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $u = u(t,x,z)$ – комплекснозначная функция трех действительных переменных, $t \geq 0$, а пространственные переменные (x,z) таковы, что $x \in [0;2\pi](mod 2\pi),\ z \in [0;l]$. Наконец, Δu – оператор Лапласа, $c,d \in \mathbb{R}$.

После перенормировки $z_1 = \pi z/l$ краевая задача заменяется на следующую

$$\begin{gathered} u_t = u - (1+ic)u|u|^2 - idLu, \\ u(t,x+2\pi,z) = u(t,x,z),\ u_z|_{z=0} = u_z|_{z=\pi} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $Lu \equiv u_{xx} + a_0^2 u_{zz},\ a_0 = \pi/l$. Индекс у переменной z опущен как в записи краевой задачи (8), так и далее.

Отметим, что краевая задача (8) имеет решения в виде плоских бегущих волн

$$u_n(t,x,z) = \exp(i\sigma_n t + inx), (n \in \mathbb{Z},\ \sigma_n = dn^2 - c). \tag{9}$$

В этом параграфе достаточно традиционным способом показано, что вопрос об устойчивости плоских бегущих волн сводится к анализу следующего характеристического уравнения

$$\mu^2 + 2\mu + q = 0, \tag{10}$$

где $q = q_{m,k} = d(m^2 + a_0^2k^2)[d(m^2 + a_0^2k^2) - 2c]$. Поэтому смена устойчивости любой волны происходит при смене знака коэффициента q. При выполнении неравенства $c < (d/2)min(1,a_0^2)$ бегущая волна (9) устойчива и теряет устойчивость, если $c > (d/2)min(1,a_0^2)$.

При $c = (d/2)min(1, a_0^2)$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости этих волн.

Исследование окрестности бегущих волн существенно облегчает принцип самоподобия. Положим

$$u(t, x, z) = v(t, x + 2dnt, z) \exp(i(dn^2 + nx)).$$

Тогда для функции $v(t, y, z)$ приходим к той же краевой задаче (8), если положить $y = x + 2dnt$. Последнее означает, что для рассмотрения устойчивости и бифуркации достаточно рассмотреть лишь решение $u_0(t, x, z) = \exp(-ict)$. Пусть $a_0 = 1$, тогда спектру устойчивости этого решения принадлежит четырехкратное нулевое собственное значение. Именно этот случай и будет рассмотрен в первой части второй главы. Вторая часть этой главы посвящена случаю близкому к случаю максимального вырождения: $|a_0 - 1| << 1$.

В §2.2 рассматривается базисный случай $a_0 = 1$. При этом показано, что использование принципа самоподобия позволяет свести поставленную задачу к исследованию структуры окрестности решения $v = 1$ вспомогательной краевой задачи

$$\begin{gathered} v_t = (1 + ic)(1 - |v|^2)v - id\Delta v, \\ v(t, y + 2\pi, z) = v(t, y, z), \ v_z|_{z=0} = v_z|_{z=\pi} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Использование метода нормальных форм в сочетании с методом инвариантных многообразий сводит последнюю задачу к исследованию системы трех дифференциальных уравнений – нормальной форме краевой задачи (11).

$$\begin{gathered} \dot{\eta}_1 = \eta_1(\varepsilon\alpha_1 + g_{11}\eta_1^2 + g_{12}\eta_2^2) + \ldots, \\ \dot{\eta}_2 = \eta_2(\varepsilon\alpha_2 + g_{21}\eta_1^2 + g_{22}\eta_2^2) + \ldots, \\ \dot{\varphi} = \beta_1\eta_1^2 + \beta_2\eta_2^2 + \ldots, \end{gathered} \tag{12}$$

где точками обозначены слагаемые имеющие более высокий порядок малости по сравнению с ранее выписанными. А $\beta_1 = \beta_2 = c(c^2 + +1), g_{11} = g_{12} = -a_1, g_{12} = g_{21} = -b_1, a_1 = (30c^4 - 9c^2 + 1)/6, b_1 = = 4c^2(1 - c^2)$.

В §2.3 проанализирована нормальная форма (системы (12)). Показано, что ее следует сначала заменить на систему

$$\dot{\rho}_1 = \rho_1 - \rho_1(a_1\rho_1 + b_1\rho_2), \ \dot{\rho}_2 = \rho_2 - \rho_2(b_1\rho_1 + a_1\rho_2). \tag{13}$$

При $c^2 \neq (33 \pm \sqrt{873})/108$ система дифференциальных уравнений (13) имеет три ненулевых изолированных состояния равновесия ($a_1 + b_1 > 0$ при всех c):

$$E_1 : \rho_1 = 1/a_1, \rho_2 = 0;\ E_2 : \rho_1 = 0, \rho_2 = 1/a_1;\ E_3 : \rho_1 = \rho_2 = 1/(a_1 + b_1).$$

Состояния равновесия E_1, E_2 асимптотически устойчивы, если

$$a_1 < b_1 \tag{14}$$

и неустойчивы, если

$$a_1 > b_1. \tag{15}$$

Наконец, состояние равновесия E_3 асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство (15) и неустойчиво при выполнении неравенства (14).

Эти результаты, а также построения §2.2 позволили доказать три основные утверждения этой главы, которые получаются, в частности, как следствия теорем, относящихся к вспомогательной краевой задаче (11). Ниже ε_0 – достаточно малая положительная постоянная.

Следствие 2.1. *Пусть $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и $d = 2c - \varepsilon$. Тогда состоянию равновесия E_1 системы (13) соответствует счетное семейство двумерных инвариантных торов краевой задачи (7), которые асимптотически устойчивы, если выполнено неравенство (14) и они неустойчивы, если имеет место неравенство (15). На каждом из них решения допускают асимптотическое представление*

$$u_n(t, x, z; \varepsilon) = exp(i\sigma_n t + inx)[1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma}(-c + i)\cos(x + 4cnt + \psi_n)] + O(\varepsilon),$$

где постоянные $\gamma = c/a_1$, $\psi_n \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная.

Следствие 2.2.*При $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и $d = 2c - \varepsilon$ состоянию равновесия E_2 системы (13) соответствует счетное число циклов краевой задачи (7), каждый из которых орбитально асимптотически устойчив, если выполнено неравенство (14) и эти циклы неустойчивы, если имеет место неравенство (15). Для этих циклов справедливо асимптотическое представление*

$$u_n(t, x, z; \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx)[1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma}(-c + i)\cos z] + O(\varepsilon).$$

Следствие 2.3.*При $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$, $d = 2c - \varepsilon$ состоянию равновесия E_3 системы (13) соответствует счетное число двумерных инвариантных торов краевой задачи (7), которые асимптотически* *устойчивы при выполнении неравенства (15) и они неустойчивы, если справедливо неравенство (14). Для решений на каждом из них имеет место асимптотическая формула*

$$u_n(t,x,z;\varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx)[1 + \sqrt{\varepsilon c}\Theta\cos(x + 4cnt + \psi_n)$$

$$\pm\sqrt{\varepsilon c}\Theta\cos z] + O(\varepsilon),$$

где $\psi_n \in \mathbb{R}$ *– произвольная постоянная, а* $\Theta = (-c+i)/\sqrt{a_1+b_1}$.

Последние три асимптотические формулы с большей точностью приведены в §2.3 диссертации.

Последний параграф второй главы обращен к краевой задаче (7) в несимметричном случае, т.е. когда $a_0 \neq 1$, но $|a_0 - 1| << 1$. Положим тогда $a_0^2 = 1 - r\varepsilon$, а $d = 2c - \varepsilon$.

Построения этого параграфа в основных чертах повторяют построения §§2.2 – 2.3 и сводят вопрос об исследовании структуры плоских бегущих волн (9) к исследованию системы из двух дифференциальных уравнений

$$\dot\rho_1 = \rho_1[1 - (a_1\rho_1 + b_1\rho_2)],\ \dot\rho_2 = \rho_2[g - (b_1\rho_1 + a_1\rho_2)]. \qquad (16)$$

Система (16) весьма схожа с системой (13). Она может иметь ненулевые состояния равновесия

$$E_{1g} : \rho_1 = 1/a_1, \rho_2 = 0;\ E_{2g} : \rho_1 = 0, \rho_2 = g/a_1,$$

$$E_{3g} : \rho_1 = (a_1 - b_1 g)/(a_1^2 - b_1^2), \rho_2 = (a_1 g - b_1)/(a_1^2 - b_1^2).$$

Состояние равновесия E_{2g} существует, если $g > 0$, а состояние равновесия E_{3g} существует, если определяющие его координаты положительны.

Нетрудно вывести условия устойчивости этих состояний равновесия. Как и в базисном случае состояниям равновесия E_{1g}, E_{3g} соответствует счетное семейство двумерных инвариантных торов. Состоянию равновесия E_{2g} соответствует счетное число циклов. Условия устойчивости найденных инвариантных многообразий совпадают с условиями устойчивости соответствующих им состояний равновесия.

В приложениях 1,2 приведены программы, написанные на языке Pascal в среде Delphi 5.0. Первая программа содержит рекуррентную последовательность формул для вычисления ляпуновской величины для нормальной формы из §1.3. Программа из приложения 2 анализирует условия устойчивости асимметричных циклов, а также определяет знак ляпуновской величины для нормальной формы из §1.5.

Опубликованные работы по теме диссертации

Статьи в научных журналах, включенных в перечень ВАКа:

1. Куликов Д.А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2006. – Т.14. – №5. – С. 120 – 132.

2. Куликов Д.А. Структура окрестности бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области // Известия РАЕН. Дифференц. уравн. Рязань. – 2006. – №11. – С. 135 – 137.

3. Куликов Д.А. Автомодельные периодические решения в задаче о динамике двух слабосвязанных осцилляторов: полный анализ // Вестник Поморского ун – та. Серия "Естественные и точные науки" – 2006. – №3. – С. 152 – 156.

Другие публикации:

4. Куликов Д.А. Циклы билокальной модели волнового уравнения: полный анализ // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. – 2001. – В. 4. – С. 93 – 96.

5. Куликов Д.А. Исследование динамики билокальной модели нелинейных волновых уравнений // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. – 2002. – В. 5. – С. 46 – 52.

6. Куликов Д.А. Знак ляпуновской величины в задаче о бифуркациях от однородного цикла // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. – 2005. – В.7. – С.78 – 81.

7. Куликов Д.А. Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области // Моделирование и анализ информ. систем. Ярославль. – 2006. – Т. 13, №1. – С. 20 – 26.

8. Куликов Д.А. Автомодельные периодические решения двухточечной разностной аппроксимации уравнения Гинзбурга – Ландау // Тезисы докладов конференции молодых ученых "Нелинейные волновые процессы."1 – 7 марта 2006. Н. – Новгород. – 2006. – С. 91.

Оригинал – макет подготовлен
в редакционно – издательском отделе ЯрГУ

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.